

伯努利双纽线右半有界区域内 广义解析函数类的三阶 Hankel 行列式^{*}

汤获, 张海燕, 牛潇萌
(赤峰学院数学与统计学院, 内蒙古 赤峰 024000)

摘 要: 设 A 表示在单位圆盘 $D = \{z: |z| < 1\}$ 内解析且满足 $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ 的函数类。首先, 引入伯努利双纽线右半有界区域内的广义解析函数类 SR_{λ}^* : $SR_{\lambda}^* = \left\{f \in A: (1-\lambda) \frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) < \sqrt{1+z} (0 \leq \lambda \leq 1; z \in D)\right\}$ 。然后, 讨论上述函数类 SR_{λ}^* 的三阶 Hankel 行列式 $H_3(1)$, 得到其上界估计。

关键词: 伯努利双纽线; 广义解析函数; 三阶 Hankel 行列式; 上界估计

中图分类号: 0174.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2019) 03-0103-07

Third Hankel determinant for a class of generalized analytic functions on the right-half bounded domain of lemniscate of Bernoulli

TANG Huo, ZHANG Haiyan, NIU Xiaomeng

(School of Mathematics and Statistics, Chifeng University, Chifeng 024000, China)

Abstract: Let A be the class of analytic functions $f(z)$ in the unit disc $D = \{z: |z| < 1\}$ normalized by $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. A class of generalized analytic functions SR_{λ}^* on the right-half bounded domain of lemniscate of Bernoulli is introduced, which is shown as follows: $SR_{\lambda}^* = \left\{f \in A: (1-\lambda) \frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) < \sqrt{1+z} (0 \leq \lambda \leq 1; z \in D)\right\}$. And, the third Hankel determinant $H_3(1)$ for the above function class SR_{λ}^* is investigated and the upper bound for the above determinant $H_3(1)$ is obtained.

Key words: lemniscate of Bernoulli; generalized analytic function; third Hankel determinant; upper bound

设 C 表示复平面, A 表示在单位圆盘 $D = \{z: |z| < 1\}$ 内解析且适合如下形式

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

的函数类。

设函数 $f(z), g(z)$ 在单位圆盘 D 内解析, 如果存在 D 内的 Schwarz 函数 $\omega(z)$, 满足 $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$, 使得 $f(z) = g(\omega(z))$, 则称 $f(z)$ 从属

于 $g(z)$, 记为 $f(z) \prec g(z)$ (见文 [1-2])。

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 +$$

$$p_3 z^3 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \quad (2)$$

且满足条件 $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ 的解析函数族。若 $p(z)$

* 收稿日期: 2018-07-16

基金项目: 国家自然科学基金 (11561001, 11271045); 内蒙古高校青年科技英才支持计划 (NJYT-18-A14); 内蒙古自然科学基金 (2018MS01026); 内蒙古高等学校科研项目 (NJZY17300, NJZY18217); 赤峰市自然科学研究课题

作者简介: 汤获 (1979 年生), 男; 研究方向: 复分析及其应用; E-mail: thth2009@163.com

$\in P$, 则 $|p_n| \leq 2 (n = 1, 2, \dots)$ (见文献 [2])。

1996 年, Sokol 和 Stankiewicz 在文 [3] 中引入了伯努利双纽线右半有界区域内的解析函数类 SR^* , 并讨论了该类函数的凸半径问题。

定义 1 设 SR^* 表示定义如下

$$SR^* = \left\{ f \in A : \frac{zf'(z)}{f(z)} < \sqrt{1+z} \ (z \in D) \right\}$$

的函数类, 其几何意义为 $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ 位于满足 $\{\omega \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \omega > 0, |\omega^2 - 1| < 1\}$ 的伯努利双纽线右半有界区域内 (见图 1)。

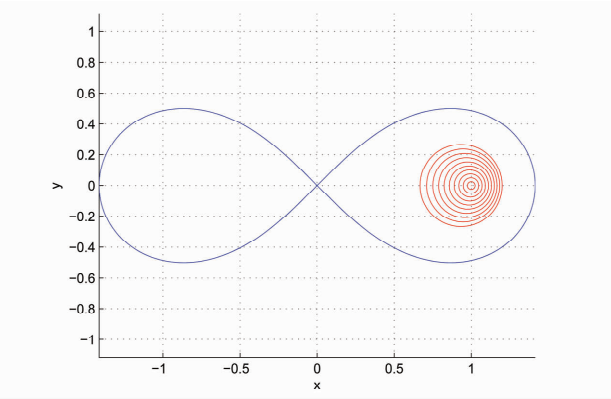


图 1 函数类 SR^* 的图像 (其中 $f(z) = z + \frac{z^2}{4}$)

Fig. 1 The graph of the function class SR^*

(where $f(z) = z + \frac{z^2}{4}$)

在此基础上, 本文引入伯努利双纽线右半有界区域内的一类广义解析函数 SR_λ^* 。

定义 2 设 SR_λ^* 表示如下:

$$SR_\lambda^* = \left\{ f \in A : (1 - \lambda) \frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) < \sqrt{1+z} \ (0 \leq \lambda \leq 1; z \in D) \right\} \quad (3)$$

的函数类。若 $f \in SR_\lambda^*$, 则 $(1 - \lambda) \frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z)$ 位于满足 $\{\omega \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \omega > 0, |\omega^2 - 1| < 1\}$ 的伯努利双纽线右半有界区域内。

注 1 在定义 2 中, 若分别取 $\lambda = 0$ 和 $\lambda = 1$, 则可得如下函数类 SR_0^* 和 SR_1^* :

- (i) 当 $\lambda = 0$ 时, $SR_0^* = \left\{ f \in A : \frac{f(z)}{z} < \sqrt{1+z} \ (z \in D) \right\}$ 蕴含 $\frac{f(z)}{z}$ 位于满足 $\{\omega \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \omega > 0, |\omega^2 - 1| < 1\}$ 的伯努利双

纽线右半有界区域内 (见图 2)。

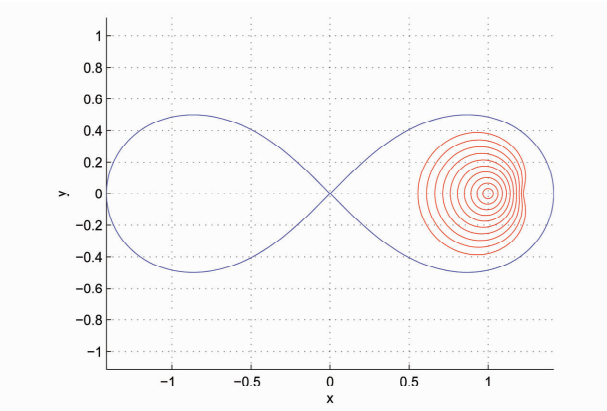


图 2 函数类 SR_0^* 的图像

(其中 $f(z) = z + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{9}$)

Fig. 2 The graph of the function class SR_0^*

(where $f(z) = z + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{9}$)

(ii) 当 $\lambda = 1$ 时, $SR_1^* = \{f \in A : f'(z) < \sqrt{1+z} (z \in D)\}$ 蕴含 $f'(z)$ 位于满足 $\{\omega \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \omega > 0, |\omega^2 - 1| < 1\}$ 的伯努利双纽线右半有界区域内 (见图 3)。

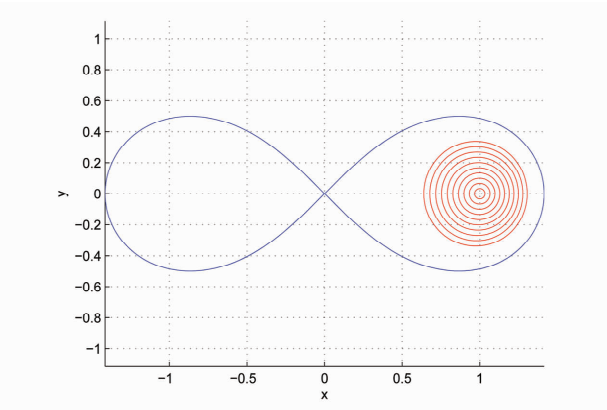


图 3 函数类 SR_1^* 的图像

(其中 $f(z) = z + \frac{z^2}{6} - \frac{z^3}{108}$)

Fig. 3 The graph of the function class SR_1^*

(where $f(z) = z + \frac{z^2}{6} - \frac{z^3}{108}$)

1976 年, Noonan 和 Thomas 在文 [4] 中引进函数 f 的 q 阶 Hankel 行列式 $H_q(n)$, 其定义如下:

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2} \end{vmatrix}$$

其中 $n \geq 1, q \geq 1$ 。

特别地, 若 $f \in A, a_1 = 1$, 则有

$$H_2(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 - a_2^2 (n = 1, q = 2),$$

$$H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2a_4 - a_3^2 (n = q = 2),$$

$$H_3(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} =$$

$$a_3(a_2a_4 - a_3^2) - a_4(a_4 - a_2a_3) + a_5(a_3 - a_2^2) \quad (n = 1, q = 3)$$

Hankel 行列式在奇异性和带积分系数的幂级数研究中扮演着很重要的角色^[5], 而且它对研究亚纯函数和理论物理起到非常重要作用^[6-7]。众所周知, 对于实数 μ , Fekete 和 Szego 给出了泛函 $a_3 - a_2^2$ 的精确估计^[1]。实际上, $|H_2(1)| = |a_3 - a_2^2|$ 是 $|a_3 - \mu a_2^2|$ 的特殊情形 (即 $\mu = 1$ 时)。近年来, 许多中外学者对解析函数类的二阶和三阶 Hankel 行列式作了大量研究, 如 Bansal^[8] 研究了一类解析函数的二阶 Hankel 行列式 $|H_2(2)| = |a_2a_4 - a_3^2|$ 的上界估计; Arif 等^[9] 研究了某类解析函数的 q 阶 Hankel 行列式; Balalola 和 Zaprawa 分别在文 [10] 和文 [11] 中研究了星象函数类和 $\alpha (0 \leq \alpha < 1)$ 阶星象函数类的三阶 Hankel 行列式; 张海燕等^[12-14] 分别讨论了与共轭点、对称点有关的不同解析函数类的三阶 Hankel 行列式。最近, 张海燕等^[15-16] 又分别讨论了与贝努利双纽线和对称点有关的解析函数、与指数函数有关的解析函数的三阶 Hankel 行列式。

受上述工作的启发, 本文主要研究伯努利双纽线右半有界区域内广义解析函数类 SR_λ^* 的三阶 Hankel 行列式 $H_3(1)$, 得到其上界估计。

1 若干引理

为了证明本文主要结论, 我们需要如下引理。

引理 1^[17] 如果 $p(z) \in P$ 适合式 (2), 则有

$$|p_2 - \nu p_1^2| \leq \begin{cases} -4\nu + 2, & \nu < 0, \\ 2, & 0 \leq \nu \leq 1, \\ 4\nu + 2, & \nu \geq 1, \end{cases} \quad (4)$$

且

(i) 如果 $\nu < 0$ 或 $\nu > 1$ 时, 则当且仅当 $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$ 或它的一个旋转时等号成立;

(ii) 如果 $0 < \nu < 1$, 则当且仅当 $p(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2}$ 或它的一个旋转时等号成立;

(iii) 如果 $\nu = 0$, 则当且仅当 $p(z) = \left(\frac{1+\eta}{2}\right)\frac{1+z}{1-z} + \left(\frac{1-\eta}{2}\right)\frac{1-z}{1+z} (0 \leq \eta \leq 1)$ 或它的一个旋转时等号成立;

(iv) 如果 $\nu = 1$, 则当且仅当 $p(z)$ 是使得 $\nu = 0$ 时等号成立的函数的倒数。

引理 2^[17] 如果 $p(z) \in P$ 适合式 (2), 则对于任一复数 ν , 有

$$|p_2 - \nu p_1^2| \leq 2\max(1, |2\nu - 1|)$$

且对函数 $p(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2}$ 和 $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$, 上述结果是精确的。

引理 3^[18] 如果 $p(z) \in P$ 适合式 (2), 则存在复数 x, z 满足 $|x| \leq 1, |z| \leq 1$, 使得

$$\begin{aligned} 2p_2 &= p_1^2 + x(4 - p_1^2), \\ 4p_3 &= p_1^3 + 2p_1x(4 - p_1^2) - (4 - p_1^2)p_1x^2 + 2(4 - p_1^2)(1 - |x|^2)z \end{aligned}$$

2 主要结果及其证明

定理 1 若 $f \in SR_\lambda^*$, 则

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{-\mu}{4(1+\lambda)^2} - \frac{1}{2(1+2\lambda)}, & \mu < \frac{-5(1+\lambda)^2}{2(1+2\lambda)}; \\ \frac{1}{2(1+2\lambda)}, & \frac{-5(1+\lambda)^2}{2(1+2\lambda)} \leq \mu \leq \frac{3(1+\lambda)^2}{2(1+2\lambda)}; \\ \frac{\mu}{4(1+\lambda)^2} + \frac{1}{8(1+2\lambda)}, & \mu \geq \frac{3(1+\lambda)^2}{2(1+2\lambda)} \end{cases}$$

且

(i) 当 $\frac{-5(1+\lambda)^2}{2(1+2\lambda)} < \mu < 8(1+\lambda)^2 - \frac{5(1+\lambda)^2}{2(1+2\lambda)}$, 有

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \left[\frac{5}{4} + \frac{\mu(1+2\lambda)}{2(1+\lambda)^2} \right] |a_2|^2 \leq \frac{1}{2(1+2\lambda)}$$

(ii) 当 $8(1+\lambda)^2 - \frac{5(1+\lambda)^2}{2(1+2\lambda)} < \mu < \frac{3(1+\lambda)^2}{2(1+2\lambda)}$, 有

$$|a_3 - \mu a_2^2| +$$

$$\left[\frac{3}{4} - \frac{\mu(1+2\lambda)}{2(1+\lambda)^2} \right] |a_2|^2 \leq \frac{1}{2(1+2\lambda)}$$

并且这些结果都是精确的。

证明 若 $f \in SR_\lambda^*$, 则由式 (3), 有

$$(1-\lambda) \frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) < \varphi(z) \quad (5)$$

这里 $\varphi(z) = \sqrt{1+z}$ 。

利用式 (5) 和从属关系, 有

$$(1-\lambda) \frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) = \varphi(\omega(z)) = \sqrt{1+\omega(z)} \quad (6)$$

定义函数

$$p(z) = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$$

显然, $p(z) \in P$, 这意味着

$$\omega(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1} \quad (7)$$

综合式 (6) 和式 (7), 可得

$$\varphi(\omega(z)) = \left(\frac{2p(z)}{1+p(z)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

而

$$\left(\frac{2p(z)}{1+p(z)} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{4} p_1 z + \left[\frac{1}{4} p_2 - \frac{5}{32} p_1^2 \right] z^2 + \left[\frac{1}{4} p_3 - \frac{5}{16} p_1 p_2 + \frac{13}{128} p_1^3 \right] z^3 + \dots,$$

$$(1-\lambda) \frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) =$$

$$1 + (1+\lambda) a_2 z + (1+2\lambda) a_3 z^2 + (1+3\lambda) a_4 z^3 + \dots$$

分别比较上两式中 z, z^2 和 z^3 的系数, 并经简单计算可得

$$a_2 = \frac{p_1}{4(1+\lambda)} \quad (8)$$

$$a_3 = \frac{p_2}{4(1+2\lambda)} - \frac{5p_1^2}{32(1+2\lambda)} \quad (9)$$

$$a_4 = \frac{p_3}{4(1+3\lambda)} - \frac{5p_1 p_2}{16(1+3\lambda)} + \frac{13p_1^3}{128(1+3\lambda)} \quad (10)$$

进一步, 根据式 (6) 和式 (7), 有

$$|a_3 - \mu a_2^2| =$$

$$\left| \frac{p_2}{4(1+2\lambda)} - \frac{5p_1^2}{32(1+2\lambda)} - \mu \left[\frac{p_1}{4(1+\lambda)} \right]^2 \right| = \frac{1}{4(1+2\lambda)} \left| p_2 - \frac{15(1+\lambda)^2 + 2\mu(1+2\lambda)1p_1^2}{8(1+\lambda)^2} \right|$$

再用引理 1, 可得

$$(i) \text{ 当 } \frac{-5(1+\lambda)^2}{2(1+2\lambda)} < \mu < 8(1+\lambda)^2 -$$

$$\frac{5(1+\lambda)^2}{2(1+2\lambda)}, \text{ 有}$$

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \left[\frac{5}{4} + \frac{\mu(1+2\lambda)}{2(1+\lambda)^2} \right] |a_2|^2 \leq \frac{1}{2(1+2\lambda)}$$

$$(ii) \text{ 当 } 8(1+\lambda)^2 - \frac{5(1+\lambda)^2}{2(1+2\lambda)} < \mu <$$

$$\frac{3(1+\lambda)^2}{2(1+2\lambda)}, \text{ 有}$$

$$|a_3 - \mu a_2^2| + \left[\frac{3}{4} - \frac{\mu(1+2\lambda)}{2(1+\lambda)^2} \right] |a_2|^2 \leq \frac{1}{2(1+2\lambda)}$$

定理 1 证毕。

定理 2 若 $f \in SR_\lambda^*$, 则对于任一复数 μ , 有

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq$$

$$\frac{1}{2(1+2\lambda)} \max \left\{ 1; \left| \frac{(1+2\lambda)\mu}{2(1+\lambda)^2} + \frac{1}{4} \right| \right\}$$

证明 由于

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{1}{4(1+2\lambda)} \cdot$$

$$\left| p_2 - \frac{15(1+\lambda)^2 + 2\mu(1+2\lambda)1p_1^2}{8(1+\lambda)^2} \right|$$

故由引理 2, 易证结论成立。

特别地, 在定理 2 中, 若取 $\mu = 1$, 则可得

$$|H_2(1)| = |a_3 - a_2^2| \text{ 的估计。}$$

推论 1 若 $f \in SR_\lambda^*$, 则有

$$|H_2(1)| = |a_3 - a_2^2| \leq \frac{1}{2(1+2\lambda)} \quad (11)$$

定理 3 若 $f \in SR_\lambda^*$, 则有

$$|a_2 a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{4(1+2\lambda)^2} \quad (12)$$

证明 由式 (8) - 式 (10), 有

$$|a_2 a_4 - a_3^2| = \frac{1}{|1024(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)^2|} \cdot$$

$$|64(1+2\lambda)^2 p_1 p_3 - 80\lambda^2 p_1^2 p_2 -$$

$$64(1+\lambda)(1+3\lambda)p_2^2 + (1+4\lambda+29\lambda^2)p_1^4|$$

设 $p_1 = c \in [0, 2], |x| = t \in [0, 1]$, 则由三角不等式及引理 3, 可得

$$|a_2 a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{|1024(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)^2|} \cdot |32c(1+2\lambda)^2(4-c^2)(1-t^2) + 8\lambda^2(4-c^2)c^2t + 16(4+16\lambda+12\lambda^2+\lambda^2c^2)(4-c^2)c^2t^2 + (1+4\lambda+5\lambda^2)c^4|$$

记

$$F(c, t) = \frac{1}{1\,024(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)^2} \cdot \\ [32c(1+2\lambda)^2(4-c^2)(1-t^2) + \\ 8\lambda^2(4-c^2)c^2t + 16(4+16\lambda+12\lambda^2+\lambda^2c^2) \\ (4-c^2)c^2t^2 + (1+4\lambda+5\lambda^2)c^4]$$

假设 $F(c, t)$ 在矩形区域 $[0, 2] \times [0, 1]$ 的内部点存在上界, 将上式关于 t 求导, 有

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{1\,024(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)^2} \cdot \\ [32(4+16\lambda+12\lambda^2+\lambda^2c^2)(4-c^2)c^2t - \\ 64c(1+2\lambda)^2(4-c^2)t]$$

对于 $0 < t < 1$ 且取固定值 $c \in (0, 2)$ 时, 易得

$\frac{\partial F}{\partial t} > 0$, 也即说明 $F(c, t)$ 是一个关于 t 的增函数, 这与我们的假设矛盾, 故 $F(c, t)$ 在 $t = 1$ 处取得最大值, 即

$$\max F(c, t) = F(c, 1) = \\ \frac{1}{1\,024(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)^2} \cdot \\ [8\lambda^2(4-c^2)c^2 + 16(4+16\lambda+12\lambda^2+\lambda^2c^2) \cdot \\ (4-c^2)c^2 + (1+4\lambda+5\lambda^2)c^4]$$

令

$$G(c) = \frac{1}{1\,024(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)^2} \cdot \\ [8\lambda^2(4-c^2)c^2 + 16(4+16\lambda+12\lambda^2+\lambda^2c^2) \cdot \\ (4-c^2)c^2 + (1+4\lambda+5\lambda^2)c^4]$$

则

$$G'(c) = \frac{1}{1024(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)^2} \cdot \\ [190\lambda^2c - 96\lambda^2c^3 - 32(4+16\lambda+12\lambda^2+\lambda^2)c + \\ 4(1+4\lambda+5\lambda^2)c^3]$$

$$G''(c) = \frac{1}{1\,024(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)^2} \cdot \\ [190\lambda^2 - 288\lambda^2c^2 - 32(4+16\lambda+12\lambda^2+\lambda^2) + \\ 12(1+4\lambda+5\lambda^2)c^2]$$

因为 $c = 0$ 是 $G'(c) = 0$ 的根, 且 $G''(c) < 0$, 所以函数 $G(c)$ 在 $c = 0$ 处取得最大值。综上可知, 函数 $F(c, t)$ 在 $t = 1, c = 0$ 处取得最大值, 即有

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq G(0) = \frac{1}{4(1+2\lambda)^2}$$

定理 3 得证。

定理 4 若 $f \in SR_\lambda^*$, 则有

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{1}{2(1+3\lambda)} \quad (13)$$

证明 由式 (8) - 式 (10), 有

$$|a_2a_3 - a_4| = \frac{1}{|128(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)|} \cdot$$

$$|8(6+18\lambda+10\lambda^2)p_1^2p_2 - 32(1+2\lambda) \cdot \\ (1+\lambda)p_3 - (18+54\lambda+26\lambda^2)p_1^3|$$

设 $p_1 = c \in [0, 2], |x| = t \in [0, 1]$, 则由三角不等式及引理 3, 可得

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{1}{|128(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)|} \cdot \\ |16(1+\lambda)(1+2\lambda)(4-c^2)(1-t^2) + \\ (8+24\lambda+8\lambda^2)(4-c^2)ct + 8(1+\lambda)(1+2\lambda) \cdot \\ (4-c^2)ct^2 + (2+6\lambda+2\lambda^2)c^3|$$

记

$$F_1(c, t) = \frac{1}{128(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)} \cdot \\ [16(1+\lambda)(1+2\lambda)(4-c^2)(1-t^2) + \\ (8+24\lambda+8\lambda^2)(4-c^2)ct + 8(1+\lambda) \cdot \\ (1+2\lambda)(4-c^2)ct^2 + (2+6\lambda+2\lambda^2)c^3]$$

假设 $F_1(c, t)$ 在矩形区域 $[0, 2] \times [0, 1]$ 的内部点存在上界, 将上式关于 t 求导, 有

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{1}{128(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)} \cdot \\ [(8+24\lambda+8\lambda^2)(4-c^2)c + \\ 16(1+\lambda)(1+2\lambda)(4-c^2)ct - \\ 32(1+\lambda)(1+2\lambda)(4-c^2)t]$$

对于 $0 < t < 1$ 且取固定值 $c \in (0, 2)$ 时, 易得 $\frac{\partial F_1}{\partial t}$

< 0 , 也即说明 $F(c, t)$ 是一个关于 t 的减函数, 这与我们的假设矛盾, 故 $F_1(c, t)$ 在 $t = 0$ 处取得最大值, 即

$$\max F_1(c, t) = F_1(c, 0) = \\ \frac{16(1+\lambda)(1+2\lambda)(4-c^2) + (2+6\lambda+2\lambda^2)c^3}{128(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)}$$

令

$$G_1(c) = \\ \frac{16(1+\lambda)(1+2\lambda)(4-c^2) + (2+6\lambda+2\lambda^2)c^3}{128(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)}$$

则

$$G_1'(c) = \\ \frac{3(2+6\lambda+2\lambda^2)c^2 - 32(1+\lambda)(1+2\lambda)c}{128(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)}$$

$$G_1''(c) = \\ \frac{6(2+6\lambda+2\lambda^2)c - 32(1+\lambda)(1+2\lambda)}{128(1+\lambda)(1+3\lambda)(1+2\lambda)}$$

因为 $c = 0$ 是 $G_1'(c) = 0$ 的根, 且 $G_1''(c) < 0$, 所以函数 $G_1(c)$ 在 $c = 0$ 处取得最大值。综上可知, 函数 $F_1(c, t)$ 在 $t = 0, c = 0$ 处取得最大值, 即有

$$|a_2a_3 - a_4| \leq G_1(0) = \frac{1}{2(1+3\lambda)}$$

定理 4 得证。

定理 5 若 $f \in SR_\lambda^*$, 则有

$$|a_2| \leq \frac{1}{2(1+\lambda)},$$

$$|a_3| \leq \frac{5}{8(1+2\lambda)} \quad (14)$$

$$|a_4| \leq \frac{13}{16(1+3\lambda)} \quad (15)$$

$$|a_5| \leq \frac{141}{128(1+4\lambda)} \quad (16)$$

证明 若 $f \in SR_\lambda^*$, 则由从属关系和式 (3), 可得

$$[(1-\lambda)f(z) + \lambda zf'(z)]^2 = z^2(1+\omega(z))$$

其中 $\omega(z)$ 是 Schwarz 函数且满足

$$\omega(0) = 1, |\omega(z)| < 1, z \in D$$

$$\text{令 } \omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n, \text{ 因为}$$

$$[(1-\lambda)f(z) + \lambda zf'(z)]^2 = [z + (1+\lambda)a_2 z^2 + (1+2\lambda)a_3 z^3 + (1+3\lambda)a_4 z^4 + \cdots]^2$$

所以有

$$[z + (1+\lambda)a_2 z^2 + (1+2\lambda)a_3 z^3 + (1+3\lambda)a_4 z^4 + \cdots]^2 = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$$

分别比较上式中 z^3, z^4, z^5, z^6 的系数, 并经简单计算可得

$$a_2 = \frac{C_1}{2(1+\lambda)},$$

$$a_3 = \frac{4C_2 - C_1^2}{8(1+2\lambda)}, a_4 = \frac{8C_3 - 4C_1 C_2 + C_1^3}{16(1+3\lambda)},$$

$$a_5 = \frac{64C_4 - 16C_2^2 + 24C_1^2 C_2 - 5C_1^4 - 32C_1 C_3}{128(1+4\lambda)}$$

又因为 $|\omega(z)| < 1, |z| \leq 1, |C_n| \leq 1$, 故

$$|a_2| \leq \frac{1}{2(1+\lambda)}, |a_3| \leq \frac{5}{8(1+2\lambda)},$$

$$|a_4| \leq \frac{13}{16(1+3\lambda)}, |a_5| \leq \frac{141}{128(1+4\lambda)}$$

定理 5 得证。

定理 6 若 $f \in SR_\lambda^*$, 则有

$$|H_3(1)| \leq \frac{8404\lambda^4 + 15724\lambda^3 + 10281\lambda^2 + 2850\lambda + 285}{256(1+2\lambda)^3(1+3\lambda)^2(1+4\lambda)}$$

证明 由于

$$H_3(1) = a_3(a_2 a_4 - a_3^2) - a_4(a_4 - a_2 a_3) + a_5(a_3 - a_2^2)$$

故由三角不等式, 可得

$$|H_3(1)| \leq |a_3| |a_2 a_4 - a_3^2| + |a_4| |a_4 - a_2 a_3| + |a_5| |a_3 - a_2^2| \quad (17)$$

将式 (11) ~ (16) 代入式 (17), 即得定理 6。

在定理 6 中, 若分别取 $\lambda = 0$ 和 $\lambda = 1$, 则可得函数类 SR_0^* 和 SR_1^* 的 $H_3(1)$ 估计。

推论 2 若 $f \in SR_0^*$, 则有

$$|H_3(1)| \leq \frac{285}{256} \approx 1.113$$

推论 3 若 $f \in SR_1^*$, 则有

$$|H_3(1)| \leq \frac{37544}{552960} \approx 0.068$$

参考文献:

- [1] SRIVASTAVA H M, OWA S. Current topics in analytic function theory [M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1992.
- [2] 汤荻, 李书海, 周海燕. 线性算子与微分从属和微分超从属 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [3] SOKOL J, STANKIEWICZ J. Radius of convexity of some subclasses of strongly starlike functions [J]. Zesz. Nauk Politech. Rzeszowskiej Mat, 1996, 19: 101-105.
- [4] NOONAN J W, THOMAS D K. On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions [J]. Trans Am Math Soc, 1976, 223(2): 337-346.
- [5] CANTOR D G. Power series with integral coefficients [J]. Bull Am Math Soc, 1963, 69: 362-366.
- [6] WILSON R. Determinantal criteria for meromorphic functions [J]. Proc Lond Math Soc, 1954, 4: 357-374.
- [7] VEIN R, DALE P. Determinants and their applications in mathematical physics [M]. New York: Springer, 1999.
- [8] BANSAL D. Upper bound of second Hankel determinant for a new class of analytic functions [J]. Appl Math Lett, 2013, 26(1): 103-107.
- [9] ARIF M, NOOR K I, RAZA M. Hankel determinant problem of a subclass of analytic functions [J]. J Inequal Appl, 2012, 2012(1): 22.
- [10] BABALOLA K O. On Hankel determinant for some classes of univalent functions [J]. Inequal Theory Appl, 2007, 6: 1-7.

- [11] ZAPRAWA P. Third Hankel determinants for subclasses of univalent functions [J]. *Mediterr J Math*, 2017, 14: 1 – 10.
- [12] 张海燕, 汤获, 马丽娜. 一类解析函数的三阶 Hankel 行列式上界估计[J]. *纯粹数学与应用数学*, 2017, 33(2): 211 – 220.
ZHANG H Y, TANG H, MA L N. The estimate of upper bound of third Hankel determinant for a class of analytic functions [J]. *Pure and Applied Mathematics*, 2017, 33(2): 211 – 220.
- [13] 张海燕, 汤获, 马丽娜. 与共轭点有关的一类解析函数的三阶 Hankel 行列式[J]. *应用泛函分析学报*, 2017, 19(3): 279 – 286.
ZHANG H Y, TANG H, MA L N. Third Hankel determinant for a class of analytic functions with respect to conjugate point[J]. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 2017, 19(3): 279 – 286.
- [14] 张海燕, 马丽娜, 王焕. 某类具有对称共轭点的倒星象函数的三阶 Hankel 行列式上界估计[J]. *纯粹数学与应用数学*, 2017, 33(5): 503 – 512.
ZHANG H Y, MA L N, WANG H. The estimate of upper bound of third Hankel determinant for a class of reciprocal starlike functions with respect to symmetric conjugate points [J]. *Pure and Applied Mathematics*, 2017, 33(5): 503 – 512.
- [15] 张海燕, 汤获, 马丽娜. 某类解析函数的三阶 Hankel 行列式[J]. *华南师范大学学报(自然科学版)*, 2018, 50(4): 107 – 110.
ZHANG H Y, TANG H, MA L N. The third Hankel determinant for some class of analytic functions [J]. *Journal of South China Normal University (Natural Science Edition)*, 2018, 50(4): 107 – 110.
- [16] ZHANG H Y, TANG H, NIU X M. Third-order Hankel determinant for certain class of analytic functions related with exponential function [J]. *Symmetry*, 2018, 10(10): 501. doi:10.3390/sym10100501.
- [17] RAZA M, MALIK S N. Upper bound of the third Hankel determinant for a class of analytic functions related with lemniscate of Bernoulli [J]. *J Inequal Appl*, 2013, 2013(1): 412.
- [18] GRENANDER U, SZEGO G. Toeplitz forms and their applications [M]. Berkeley: University of California Press, 1958.

(责任编辑 冯兆永)